UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL

UEPS: APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA TRIGONOMETRIA APLICADA AO FUTEBOL

DAIANA BORDIN

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Marilda Machado Spindola

PRODUTO EDUCACIONAL

Os resultados procedentes dos estudos dessa pesquisa fundamentou a elaboração de um produto que consiste em um material de apoio pedagógico, com planos de aulas de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), a qual se planejou, elaborou, aplicou e avaliou para a promoção da aprendizagem significativa da trigonometria.

O material foi desenvolvido para ser compartilhado, podendo servir de inspiração aos professores, como material didático principal ou complementar, para a abordagem da trigonometria, do nono ano do Ensino Fundamental. Nesse material de apoio pedagógico estão descritas as etapas para o desenvolvimento da UEPS, podendo as atividades e procedimentos serem adaptados para a realidade da escola, na qual a UEPS será aplicada.

2.1. Detalhamento das Aulas

O material de apoio pedagógico, com planos de aulas da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa é composto por oito aulas, descritas a seguir.

AULA 1: MAPA CONCEITUAL

Nesta primeira aula foram apresentados aos estudantes os conceitos, exemplos e dicas de construção de Mapa Conceitual. Logo após, foi solicitado que os mesmos, em grupos construíssem um mapa sobre um tema de livre escolha, mas com os conhecimentos que possuíssem naquele momento. Posteriormente, após pesquisa na internet sobre o tema selecionado anteriormente, o mesmo grupo fez e apresentou para a turma, um novo mapa conceitual, evidenciando desta forma o crescimento do mapa conceitual final, em comparação com o inicial.

Ainda neste primeiro encontro, foi solicitado aos estudantes que, individualmente elaborassem um mapa conceitual sobre a Trigonometria. Para o desenvolvimento do trabalho, os estudantes receberam orientações para refletirem sobre o contexto da Trigonometria, para que desta forma mostrassem os conhecimentos que tinham sobre o assunto, ou seja, para que fosse possível analisar quais eram os subsunçores dos estudantes.

Para a análise dos mapas conceituais, optou-se pela adoção da taxonomia topológica elaborada por Cañas et al. (2006) e Miller (2008), utilizada e validada pelo Projeto Conéctate al Conocimiento (MILLER, 2008).

A Taxonomia Topológica expõe uma maneira de classificar e avaliar estruturalmente a heterogeneidade de mapas conceituais através do uso de parâmetros comuns que viabilizem a aferição de avanços no processo de construção de mapas.

Segundo Cañas et al. (2006), essa taxonomia foi criada "[...]para servir como apoio na consecução dos objetivo específicos do projeto e como um instrumento de investigação[...]" .

Esta Topologia é composta por cinco critérios, e cada critério é avaliado em um nível de 0 a 6, sendo nível 0 (o mais simples) e o nível 6 o mais elaborado. Esses critérios são descritos por Boff (2017), como sendo:

- Critério C1 (utilização de conceitos):
  - ✓ Presença de trechos de textos no lugar de conceitos
  - ✓ Poucas palavras (aprendizagem mecânica),
  - ✓ Palavras isoladas.
- Critério C2 (termos de ligação e relações entre conceitos):
  - ✓ Presença ou não de termos de ligação.
  - ✓ Palavras que são utilizadas.
  - ✓ Relações adequadas entre os conceitos.
- Critério C3 (grau de ramificação):
  - ✓ Pontos de ramificações.
  - ✓ Número de conceitos que apresentam ramificações.
- Critério C4 (profundidade hierárquica):
  - ✓ Número de ligações entre o conceito raiz e o conceito mais afastado (este critério só tem sentido se o mapa possuir pelos menos um conceito raiz).
- Critério C5 (presença de ligações cruzadas):
  - ✓ Proposição entre conceitos (formando circuito fechado).

Com base nesses critérios, foi organizado um quadro para realizar a análise estrutural dos mapas conceituais, no qual apresentamos as relações entre critérios e níveis dessa Taxonomia Topológica (Quadro 1).

Quadro 1 - Relação de Critérios e níveis na análise estrutural dos mapas conceituais

NÍVEL	**CRITÉRIO**				
	C1 Conceitos	**C2 Termos de Ligações**	**C3 Grau de Ramificações**	**C4 Profundidade Hierárquica**	**C5 Ligações Cruzadas**
N0	Nenhuma associação com conceitos relacionados ao tema	Não apresenta	Linear (0 ou 1 ponto)	Nenhuma	Nenhuma
N1	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Subsunçores)	Apresenta menos de 50%	Linear (0 ou 1 ponto)	Nenhuma	Nenhuma
N2	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria.	Apresenta menos de 50%	Ramificação baixa (2 pontos)	1 nível	Nenhuma
N3	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (inferior a 50%)	Apresenta 50%	Ramificação média (3 ou 4 pontos)	2 níveis	Nenhuma
N4	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (igual a 50%)	Apresenta 50%	Ramificação alta (5 ou 6 pontos)	3 níveis	Nenhuma
N5	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Superior a 50%)	Apresenta mais de 50%	Ramificação alta (5 ou 6 pontos)	4 níveis	1 ou 2 ligações
N6	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria e suas aplicações. (Superior a 50%)	Apresenta mais de 50%	Ramificação altíssima (7 ou mais pontos)	5 ou mais níveis	Mais de 2 ligações

Fonte: adaptado de Boff (2017).

Importante ressaltar que os níveis, para cada critério foram adaptados para este estudo, considerando os conceitos da Trigonometria.

De forma resumida, o Quadro 2 apresenta os símbolos correspondentes para cada critério e nível.

Quadro 2 – Avaliação estrutural dos mapas conceituais.

Nível	C1	C2	C3	C4	C5
N0	NC	0	0-1	0	0
N1	$C_1 < 0,5$	$C_1 < 0,5$	0 - 1	0	0
N2	$C_2 < 0,5$	$C_1 > 0,5$	2	1	0
N3	$C_1 = 0,5$	$C_1 = 0,5$	3 - 4	2	0
N4	$C_2 = 0,5$	$C_2 = 0,5$	5 - 6	3	0
N5	$C_1 > 0,5$	$C_1 > 0,5$	5 - 6	4	1 - 2
N6	$C_2 > 0,5$	$C_2 > 0,5$	≥ 7	≥ 5	>2

Fonte: adaptado de Boff (2017).

O Quadro 3 tem o intuito de descrever o significado atribuído a cada sigla utilizada no Quadro 2.

Quadro 3 – Siglas utilizadas no Quadro 2.

SIGLAS	Significado
NC	Nenhuma associação com conceitos relacionados ao tema
$C_1 < 0,5$	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (subsunçores)
$C_2 < 0,5$	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria.
$C_1 = 0,5$	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (inferior a 50%)
$C_2 = 0,5$	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (igual a 50%)
$C_1 > 0,5$	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Superior a 50%)
$C_2 > 0,5$	Presença de tópicos relacionados à Trigonometria e suas aplicações. (Superior a 50%)

Fonte: adaptado de Boff (2017).

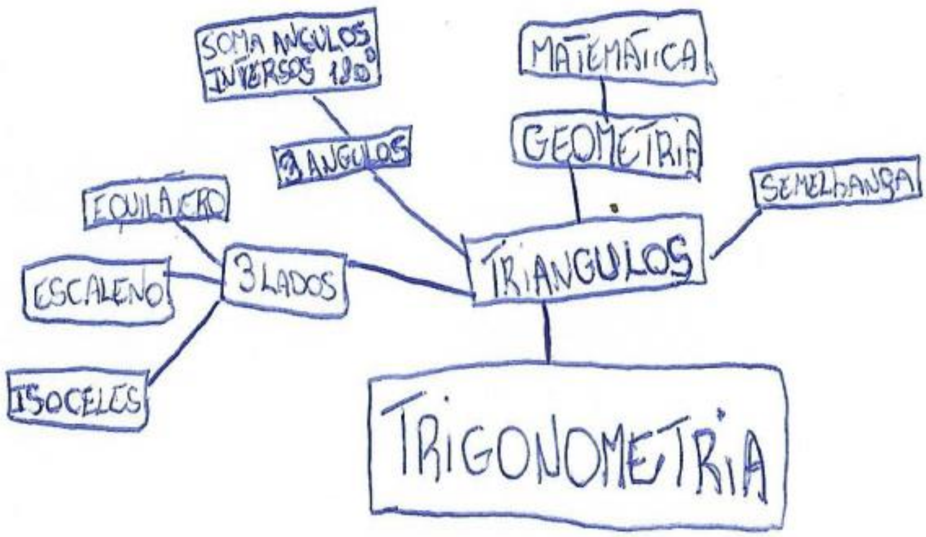
Segundo Boff (2017), quanto ao critério C2, a ausência de termos de ligação é representada por 0 (zero), a presença de metade ou menos de termos de ligação entre conceitos por (< 0,5), a presença de mais da metade por (> 0,5) e o número (1) representa a presença de termos de ligações em todos os conceitos apresentados no mapa conceitual.

Ainda segundo Boff (2017), aos critérios C3, C4, C5, os números indicam a quantidade de pontos de ramificações, os números de ligações entre conceito raiz e o mais afastado, e os números de ligações cruzadas, respectivamente, presentes no mapa conceitual.

Como coloca Moreira (2011), os mapas conceituais são instrumentos que podem levar a profundas modificações na maneira de ensinar, de avaliar e de aprender, por promoverem a Aprendizagem Significativa, principalmente quando comparados com técnicas didáticas voltadas para a aprendizagem mecânica. Porém, é necessário que os estudantes adquiram habilidades que os auxiliem a construção desses mapas.

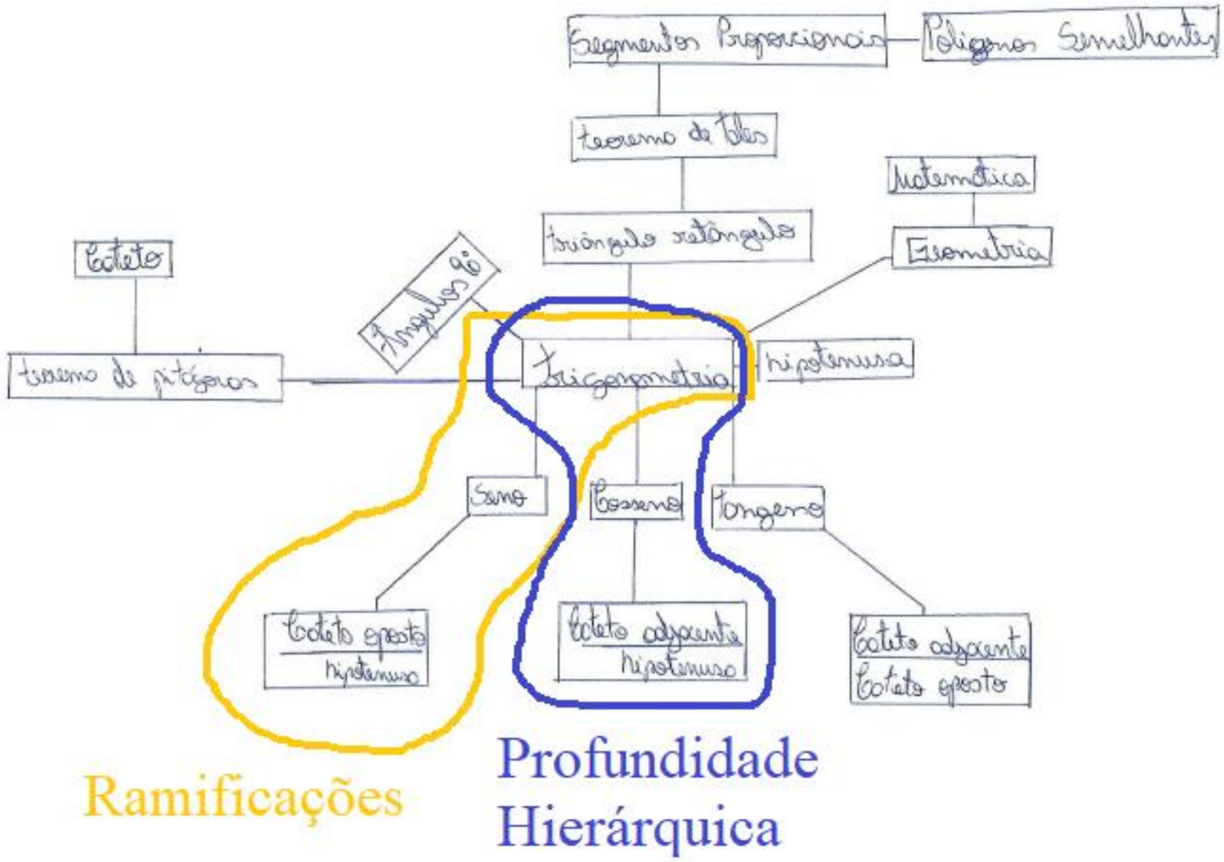
Como modelo de Critérios de análise dos Mapas conceituais confeccionados pelos estudantes e examinados pela autora, apresentamos as Figuras 56 e 57.

Figura 1 - Mapa Conceitual elaborado pelo Estudante 3.



Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

Figura 2 - Mapa Conceitual elaborado pelo Estudante 4.

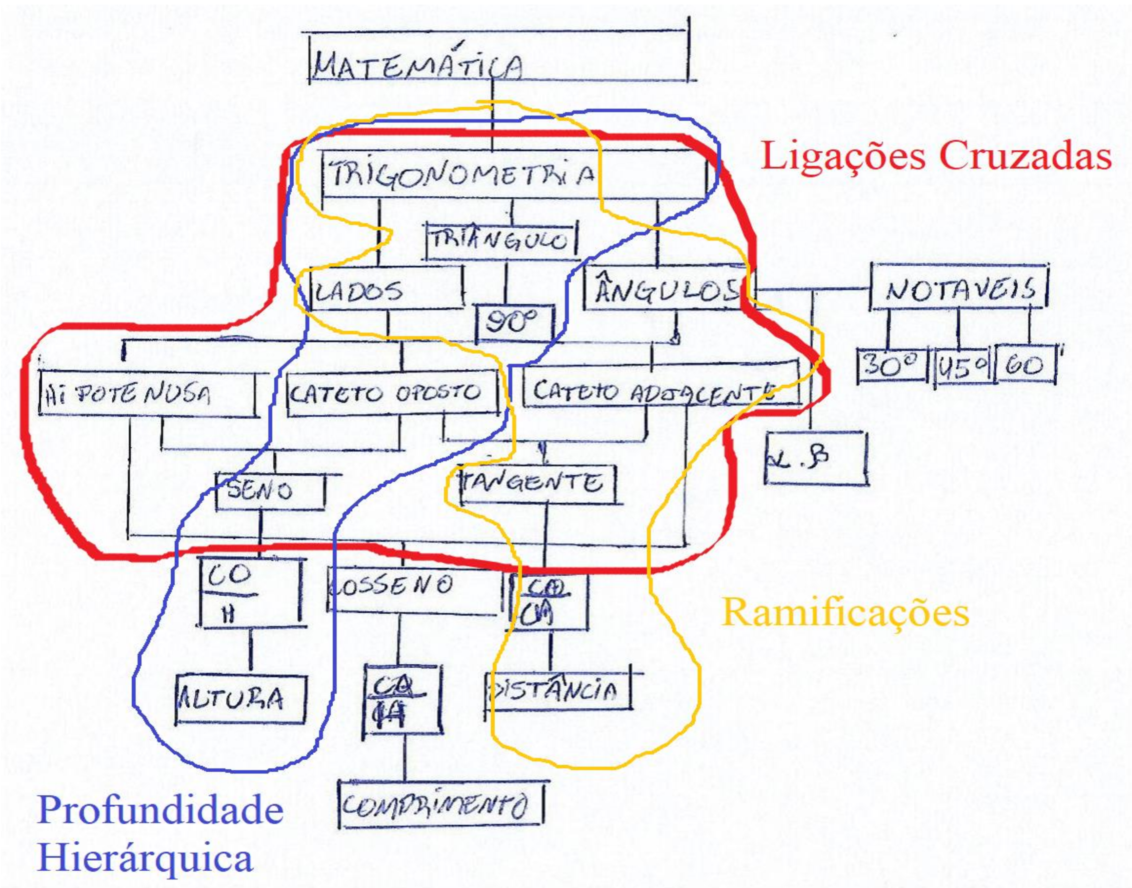


Fonte: autora

Ao Analisarmos o mapa conceitual da Figura 56, percebemos, conforme apresentado no Quadro 1, que o mesmo encontra-se no Nível 0 em relação aos conceito (C1), pois apresenta nenhuma associação com o tema, e nos demais critérios também é classificado como Nível 0 . Já o mapa da Figura 57, em relação aos conceitos está no Nível 4, visto que 50% do mapa conceitual explana sobre conceitos trigonométricos. Em relação às ramificações é classificado como Nível 3, pois possui 3 pontos de ramificações sobre o tema Trigonometria. Possui, ainda 3 níveis de profundidade hierárquica, classificado como Nível 4, e não possui Ligações Cruzadas.

Na Figura 58 apresentamos um exemplo de mapa conceitual com Conceitos N6, pois apresenta aplicabilidades dos conceitos. Os termos de ligações somam mais de 50% do mapa falando em Trigonometria, o Grau de Ramificação é classificado como alto, cerca de 6 pontos e apresenta Ligações Cruzadas.

Figura 3 - Mapa Conceitual explicativo



Fonte: autora

Plano de Aula 1

Mapa Conceitual é uma estratégia potencialmente facilitadora da Aprendizagem Significativa. Também é uma técnica muito flexível e em razão disso pode ser usado em diversas situações, para diferentes finalidades: como instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem e avaliação (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993).

Segundo Moreira (2012b, p.1), “mapas conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais, se for o caso. Mapas conceituais não buscam classificar conceitos, mas sim relacioná-los e hierarquizá-los.”

Na nossa aula sobre mapas conceituais, iniciaremos comentando da importância de fazer anotações nas aulas e de como fazê-las, em seguida mostraremos como o mapa conceitual pode ajudá-los na organização dos conteúdos a serem estudados.

Desenvolvimento

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

Pré requisitos

Não há pré requisitos.

Objetivos

Compreender o que é um mapa conceitual e qual a sua importância.

Identificar as características mais importantes de um mapa conceitual.

Elaborar um mapa conceitual.

Reconhecer o mapa conceitual.

Avaliação

Durante a aula observando o interesse e a participação do Estudante, bem como a construção de um mapa conceitual.

1º aula

Duração: 55 minutos.

Tema: Mapa Conceitual

Procedimento: Iniciaremos a aula comentando sobre o que devemos anotar enquanto o professor ministra sua aula, será que devemos anotar tudo? E se não conseguirmos anotar tudo que o professor fala, o que devemos fazer? Como devemos proceder?

Logo após abordaremos o tema mapa conceitual, conceito, tipos de mapas conceituais, para que eles servem, como se constrói e como o estudante pode verificar seu próprio nível de aprendizagem à partir da elaboração de um mapa conceitual. Enfatizaremos que não existe "o mapa conceitual correto" mas que sua estrutura pode apontar para o tipo de aprendizagem que se alcançou ao estudar determinado tema. Sugerir aos estudantes que elaborem seus próprios mapas conceituais e apresentá-los para a turma.

Introdução

Para que possamos trabalhar juntos, a turma será dividida em grupos de 4 ou 5 estudantes e fazer uma exposição oral, primeiramente sobre a importância de anotar o que o professor fala e também de como anotar o que ele fala.

As porque devo anotar o que meu professor fala se está tudo escrito no livro?

Simples, primeiro porque sempre haverá pontos importantes que não estarão nos livros, e segundo por que as anotações:

- Ajudam a memorizar a matéria
- Ajudam a relembrar os pontos principais
- Importante fonte de material para uma apresentação
- Ajuda na concentração
- Constrói a compreensão
- Ajuda a fazer questionamentos

Então como devo anotar o que meu professor fala? Simples, segue abaixo algumas dicas que irão facilitar você na hora de estudar o conteúdo, bem como na memorização de alguns itens:

- Faça anotações breves
- Use abreviações e símbolos
- Use suas próprias palavras, mas fórmulas, definições e fatos específicos devem ser anotados com exatidão.
- Faça um diagrama
- Ou melhor, faça um mapa conceitual

Você não sabe o que é um mapa conceitual? Vamos conversar um sobre isso!

Neste momento faremos algumas perguntas que levem os estudantes a refletirem sobre o tema que vai ser estudado ao passo que verifica seus conhecimentos prévios sobre o assunto. Exemplos de perguntas:

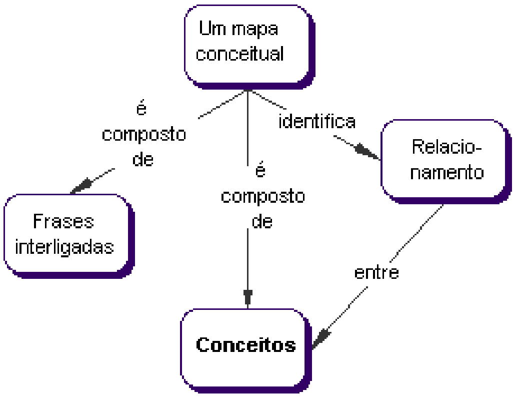
a) Qual é a imagem que vem a sua mente quando você ouve a palavra “mapa”?

b) Você já utilizou um mapa? Para que ele serve?

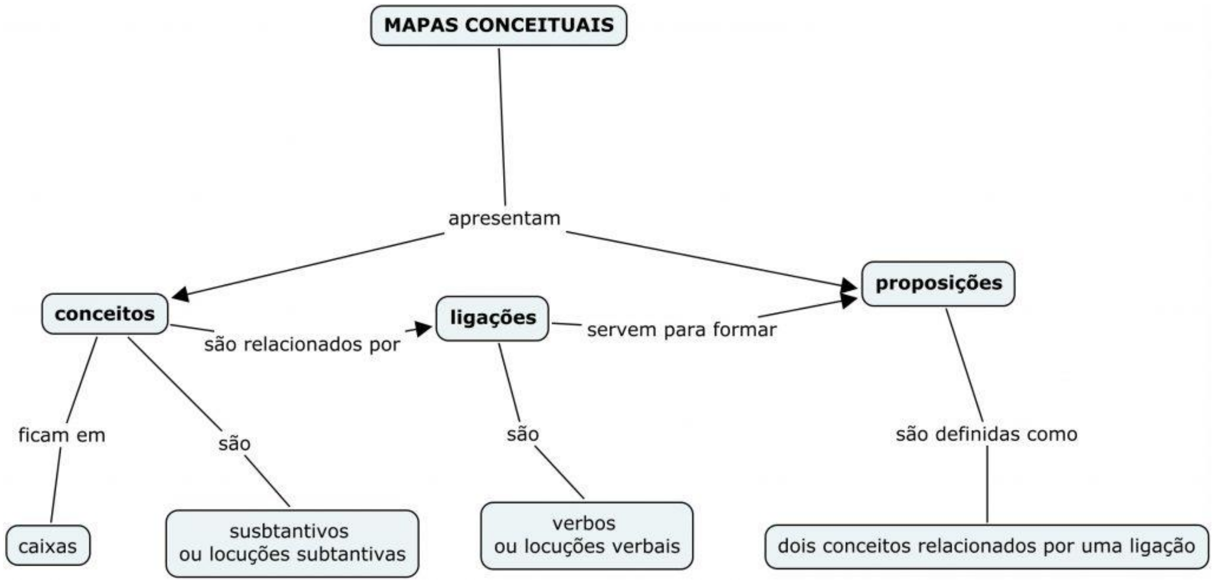
c) Você já conseguiu aprender alguma coisa utilizando um mapa? O quê?

d) Você sabe o que é um mapa conceitual?

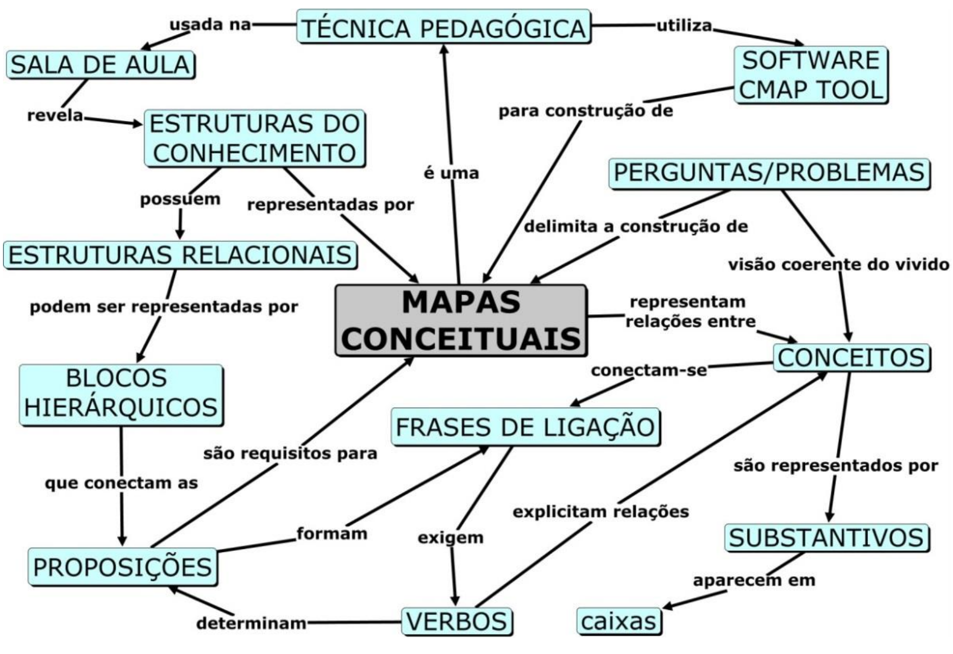
Mapas Conceituais: são diagramas que indicam relações significativas entre conceitos de um conteúdo, um tema ou um assunto de uma disciplina ou um conteúdo específico. Veja alguns exemplos:



Fonte: http://penta.ufrgs.br/tege/mapas4.htm

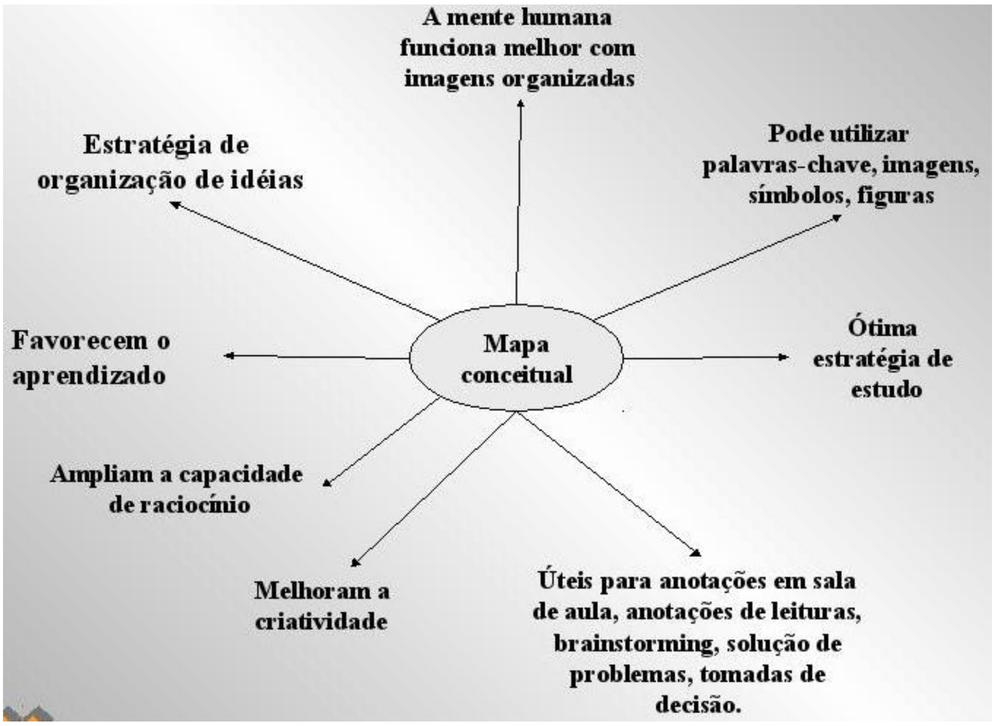


Fonte: http://www.antigomoodle.ufba.br/mod/book/view.php?id=74558



Fonte: http://wwwmdtbcognitiva.blogspot.com/2011/06/mapas-conceituais.html

A estratégia na organização de ideias por meio de palavras chaves, cores, imagens, símbolos, em uma estrutura que se irradia a partir de uma ideia, um conceito, um conteúdo. Os desenhos de mapas conceituais melhoram a criatividade e produtividade pessoal.



Fonte: http://www.webquestfacil.com.br/webquest.php?pg=tarefa&wq=15321

Agora que você já entendeu o que é um mapa conceitual, faremos a construção de um mapa. O procedimento será o seguinte:

a) Juntamente com seu grupo, escolham um tema de interesse comum e construa seu primeiro mapa conceitual, somente com o que você já conhece do assunto.
b) Agora faremos uma pesquisa na internet sobre o tema escolhido, para que possamos aprender mais sobre esse assunto.
c) De posse de novos conhecimentos sobre o tema escolhido, monte um novo mapa conceitual, agora muito mais elabora e rico.
d) Compare os dois mapas, houve mudanças? Aponte-as.
e) Com o mapa que você fez, acredita ser possível aprender sobre o tema escolhido? Justifique.
f) Apresente seu mapa conceitual para a turma.
g) Agora que você já conhece mapa conceitual, elabore um mapa conceitual sobre o tema "Trigonometria", somente com o conhecimento que você já possui sobre o assunto. Para entregar pra a professora.

AULA 2: INTRODUÇÃO A TRIGONOMETRIA

Iniciamos nossa segunda aula com perguntas com o intuito de despertar o interesse dos estudantes pelo conteúdo. Logo após prosseguimos demonstrando que desde a antiguidade já se utilizava a Trigonometria, com algumas aplicações, para posteriormente seguirmos com as definições. Fizemos ainda, algumas recordações importantes que serviram de pré-requisitos para a aprendizagem de Trigonometria.

O objetivo desde plano de aula foi o Ensino da Trigonometria no triângulo retângulo, onde se introduziu os conceitos das razões trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente. Este plano de aula foi dividido em duas partes, sendo o tempo para a primeira aula de três períodos e a segunda aula de dois períodos. Cada período é de 55 minutos. Na primeira aula, foram apresentadas as definições e alguns exemplos. Na segunda aula, foram apresentados exemplos do cotidiano dos estudantes para que possam compreender melhor a matéria.

Plano de Aula 2

A Trigonometria é uma subárea da Matemática no qual se estuda as relações entre ângulos e distancias, usando triângulos retângulos (SILVA 2017). Muito utilizada também em outras áreas de estudo como Engenharia, física, química, biologia, geografia, astronomia, medicina, engenharia, dentre outras, a Trigonometria é fundamental na prática de profissionais dessas áreas.

Através de distâncias e alturas associadas os conhecimentos sobre triângulo retângulo e a ideia de semelhança entre triângulos, é possível fazer uma série de estimativas, por exemplo, com auxilio de sua sombra, podemos estimar a altura de um prédio, desde que saibamos a distância que nos separa de sua base.

O objetivo desde plano de aula é o Ensino da Trigonometria no triângulo retângulo, onde pretende-se introduzir os conceitos das razões trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente.

Desenvolvimento

O plano de aula está dividido em duas partes, sendo o tempo para a primeira aula é de três períodos e a segunda aula de dois períodos, sendo cada período de 55 minutos.

Na primeira aula, será apresentado as definições e alguns exemplos.

Na segunda aula, apresentaremos exemplos do cotidiano para que possam compreender melhor a matéria.

Pré requisitos

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos)

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Objetivos

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas envolvendo as relações trigonométricas.

Avaliação

Atividades em sala.

Listas de exercícios envolvendo aplicações da Trigonometria no cotidiano.

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

1º aula

Duração: 165 minutos**.**

Tema: Trigonometria

Procedimento: Iniciar a aula com perguntas para despertar o interesse dos estudantes no conteúdo, logo após prosseguir com as definições.

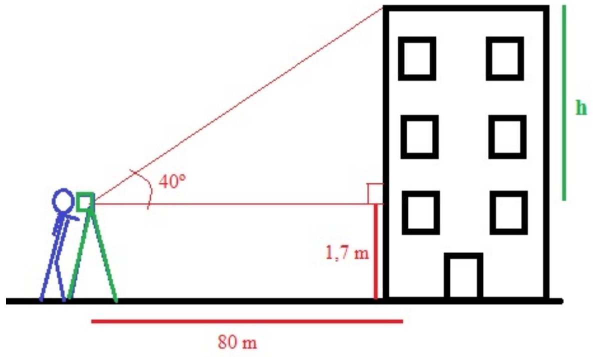
Introdução

A Trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas.

Desde a antiguidade já se usava da Trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

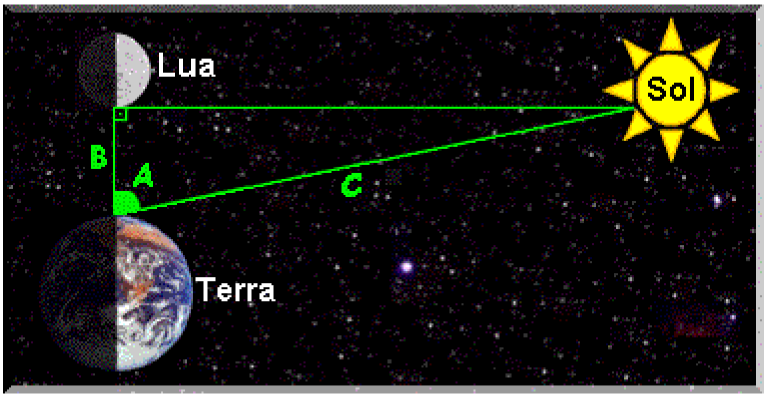
Algumas aplicações da Trigonometria são:

Determinação da altura de certo prédio.



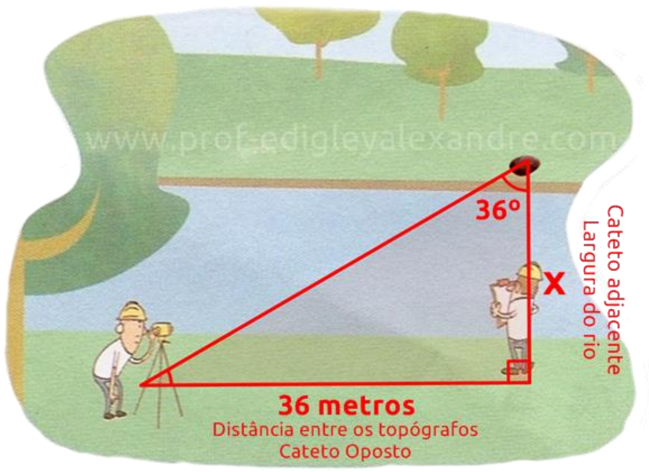
Fonte: http://meteorotica.blogspot.com/2012/01/exercicios-resolvidos-sobre-razoes_4538.html

Como medir a distância da Terra à Lua? Com a Trigonometria.



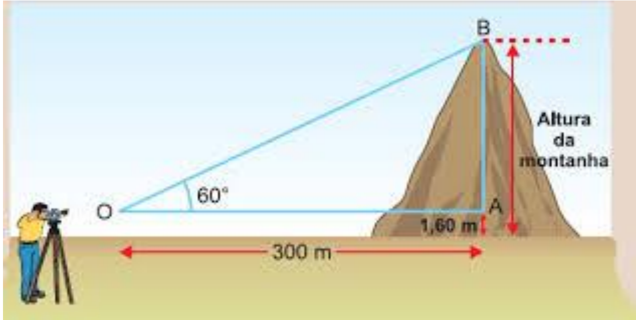
Fonte: http://www.zenite.nu/aristarco-de-samos-e-a-distancia-terra-sol/

Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.



Fonte: https://www.prof-edigleyalexandre.com/2012/11/Trigonometria-algumas-aplicacoes.html

Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a Trigonometria ele demoraria muito tempo para desenhar um mapa.



Fonte:http://porteiras.s.unipampa.edu.br/pibid/files/2015/11/Sequ%C3%AAncia-Did%C3%A1tica-Trigonometria_IFSulII.pdf

Relembrando definições de triângulos:

Para que possamos calcula todos esses nossos exemplos e muitos mais, utilizamos a Trigonometria do triângulo retângulo.

O triângulo é a figura mais simples e uma das mais importantes da Geometria, ele é objeto de estudos desde os povos antigos. O triângulo possui propriedades e definições de acordo com o tamanho de seus lados e medida dos ângulos internos.

Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado como:

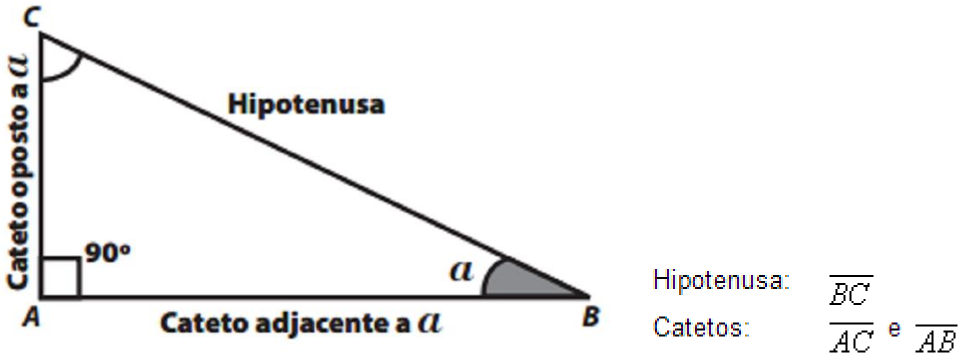
- Equilátero: possui os lados com medidas iguais.
- Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.
- Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes.

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser denominados:

- Acutângulo: possui os ângulos internos com medidas menores que 90º
- Obtusângulo: possui um dos ângulos com medida maior que 90º.
- Retângulo: possui um ângulo com medida de 90º, chamado ângulo reto.

No triângulo retângulo existem algumas importantes relações, uma delas é o ***Teorema de Pitágoras***, que diz o seguinte: *"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"*. Essa relação é muito importante na Matemática, responsável pela resolução de inúmeros problemas geométricos.

Seno, Cosseno e Tangente



Fonte: https://www.altoastral.com.br/geometria-teorema-pitagoras/

Relembrando:

Hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º.

Ângulo (b)

Sen (b) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}{hipotenusa}$

Cos (b) = $\frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}{hipotenusa}$

Tan (b) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}$

Ângulo (c)

Sen (c) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}{hipotenusa}$

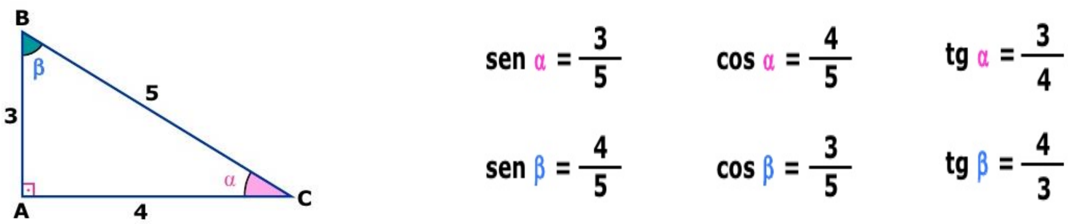
Cos (c) = $\frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}{hipotenusa}$

Tan (c) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}$

Observação: B + C = 90º

Exemplos:

1-Determine os valores de Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos β e α



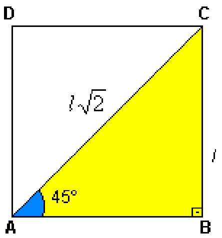
Fonte: https://Estudantesonline.uol.com.br/matematica/relacoes-trigonometricas-no-triangulo-retangulo.html

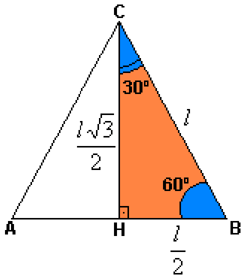
Obs: α + β = 90º

Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 30º, 45 e 60º

Apesar de serem muito usados nos cálculos de **Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo**, os valores de Seno Cosseno e Tangente dificilmente podem ser decorados, até mesmo porque são mais de 80. Existem, entretanto, alguns ângulos que são tidos como Notáveis.

Fonte:





https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

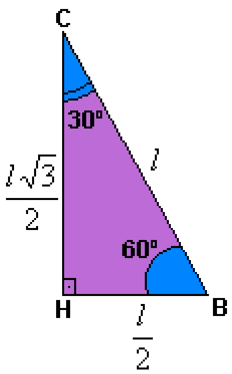
Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos os seguintes resultados:

Quadrado de lado ***l***, possui diagonal $l\sqrt{2}$

Triangulo equilátero de lado ***l*** e altura $l\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) Seno, Cosseno e Tangente de 30º

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para os ângulos de 30º, temos:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

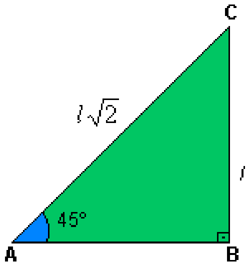
$$\cos 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l} . 2}{2 . \cancel{l}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

B) Seno, Cosseno e Tangente de 45º

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para um ângulo de 45º, temos:



$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l} . 1}{\cancel{l} . \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

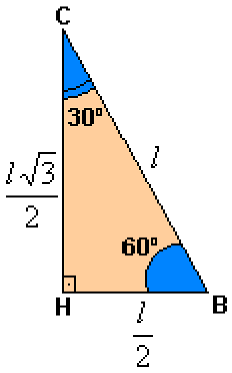
$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l} . 1}{\cancel{l} . \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

C) Seno, Cosseno e Tangente de 60º

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para um ângulo de 60º, temos:



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

Esses ângulos são muito frequentes e por isso formam uma tabela bem mais simples que quando decorada, ajuda muito na resolução dos exercícios.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte:https://www.matematicagenial.com/2017/05/dica-como-lembrar-facilmente-tabela-trigonometrica.html

Música para Decorar Tabela de Seno Cosseno e Tangente de 30°, 45° e 60°.

Um, dois três,

Três, dois, um,

Tudo sobre dois!

Depois vem a raiz,

Sobre o três e o dois!

A Tangente é diferente,

Vejam só vocês!

Raiz de três sobre três,

Um raiz de três!

Essa letra deve ser cantada no ritmo e melodia da canção de natal Jigle Bells

Utilizar exercícios do livro didático

2º aula

Duração: 110 minutos.

Tema: aplicações das razões trigonométricas

APLICAÇÕES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

As razões trigonométricas são utilizadas principalmente na determinação de distâncias incessíveis. Assim, para calcular a altura de uma montanha ou a distância entre as margens de um rio, por exemplo, usa-se um instrumento de precisão para medir ângulos ou aplica-se as razões trigonométricas.

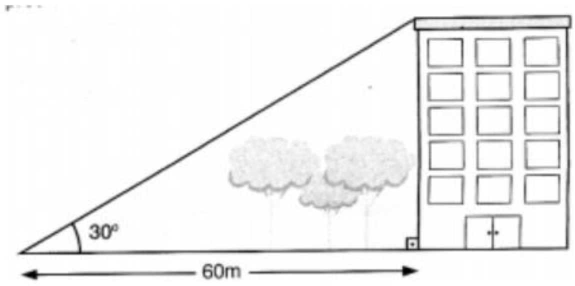
Existe uma tabela já estabelecida com os valores dos ângulos. (entregar tabela xerocada para cada Estudante). Explicar como fazer uso da tabela.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017 5	0,999 8	0,017 5	46°	0,719 3	0,694 7	1,035 5
2°	0,034 9	0,999 4	0,034 9	47°	0,731 4	0,682 0	1,072 4
3°	0,052 3	0,998 6	0,052 4	48°	0,743 1	0,669 1	1,110 6
4°	0,069 8	0,997 6	0,069 9	49°	0,754 7	0,656 1	1,150 4
5°	0,087 2	0,996 2	0,087 5	50°	0,766 0	0,642 8	1,191 8
6°	0,104 5	0,994 5	0,105 1	51°	0,777 1	0,629 3	1,234 9
7°	0,121 9	0,992 5	0,122 8	52°	0,788 0	0,615 7	1,279 9
8°	0,139 2	0,990 3	0,140 5	53°	0,798 6	0,601 8	1,327 0
9°	0,156 4	0,987 7	0,158 4	54°	0,809 0	0,587 8	1,376 4
10°	0,173 6	0,984 8	0,176 3	55°	0,819 2	0,573 6	1,428 1
11°	0,190 8	0,981 6	0,194 4	56°	0,829 0	0,559 2	1,482 6
12°	0,207 9	0,978 1	0,212 6	57°	0,838 7	0,544 6	1,539 9
13°	0,225 0	0,974 4	0,230 9	58°	0,848 0	0,529 9	1,600 3
14°	0,241 9	0,970 3	0.249 3	59°	0,857 2	0.515 0	1.664 3
15°	0,258 8	0,965 9	0,267 9	60°	0,866 0	0,500 0	1,732 1
16°	0,275 6	0,961 3	0,286 7	61°	0,874 6	0,484 8	1,804 0
17°	0,292 4	0,956 3	0,305 7	62°	0,882 9	0,469 5	1,880 7
18°	0,309 0	0,951 1	0,324 9	63°	0,891 0	0,454 0	1,962 6
19°	0,325 6	0,945 5	0,344 3	64°	0,898 8	0,438 4	2,050 3
20°	0,342 0	0,939 7	0,364 0	65°	0,906 3	0,422 6	2,144 5
21°	0,358 4	0,933 6	0,383 9	66°	0,913 5	0,406 7	2,246 0
22°	0,374 6	0,927 2	0,404 0	67°	0,920 5	0,390 7	2,355 9
23°	0,390 7	0,920 5	0,424 5	68°	0,927 2	0,374 6	2,475 1
24°	0,406 7	0,913 5	0,445 2	69°	0,933 6	0,358 4	2,605 1
25°	0,422 6	0,906 3	0,466 3	70°	0,939 7	0,342 0	2,747 5
26°	0,438 4	0,898 8	0,487 7	71°	0,945 5	0,325 6	2,904 2
27°	0,454 0	0,891 0	0,509 5	72°	0,951 1	0,309 0	3,077 7
28°	0,469 5	0,882 9	0,531 7	73°	0,956 3	0,292 4	3,270 9
29°	0,484 8	0,874 6	0,554 3	74°	0,961 3	0,275 6	3,487 4
30°	0,500 0	0,866 0	0,577 4	75°	0,965 9	0,258 8	3,732 1
31°	0,515 0	0,857 2	0,600 9	76°	0,970 3	0,241 9	4,010 8
32°	0,529 9	0,848 0	0,624 9	77°	0,974 4	0,225 0	4,331 5
33°	0,544 6	0,838 7	0,649 4	78°	0,978 1	0,207 9	4,704 6
34°	0,559 2	0,829 0	0,674 5	79°	0,981 6	0,190 8	5,144 6
35°	0,573 6	0,819 2	0,700 2	80°	0,984 8	0,173 6	5,671 3
36°	0,587 8	0,809 0	0,726 5	81°	0,987 7	0,156 4	6,313 8
37°	0,601 8	0,798 6	0,753 6	82°	0,990 3	0,139 2	7,115 4
38°	0,615 7	0,788 0	0,781 3	83°	0,992 5	0,121 9	8,144 3
39°	0,629 3	0,777 1	0,809 8	84°	0,994 5	0,104 5	9,514 4
40°	0,642 8	0,766 0	0,839 1	85°	0,996 2	0,087 2	11,430 1
41°	0,656 1	0,754 7	0,869 3	86°	0,997 6	0,069 8	14,300 7
42°	0,669 1	0,743 1	0,900 4	87°	0,998 6	0,052 3	19,081 1
43°	0,682 0	0,731 4	0,932 5	88°	0,999 4	0,034 9	28,636 3
44°	0,694 7	0,719 3	0,965 7	89°	0,999 8	0,017 5	57,290 0
45°	0,707 1	0,707 1	1,000 0				

Fonte: http://mileidestonsis.blogspot.com/2011/04/tabela-de-razoes-trigonometricas.html

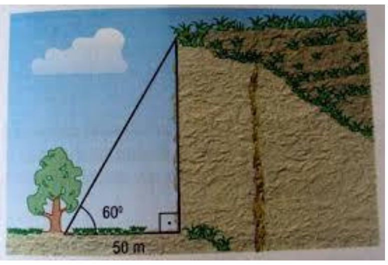
Exemplos

1- Uma pessoa está distante 60m de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 30º em relação à horizontal. Qual é a Altura do prédio?



Fonte: https://pt-static.z-dn.net/files/d92/93f9460966e6628429dc3014cf53436a.png

2- O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 60º. Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta?



Fonte: http://mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/trigo.htm

Resolução: Ele quer saber a hipotenusa do triângulo.

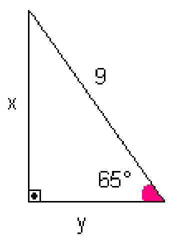
Cos 60º = $\frac{50}{x}$

Substituindo cos 60º por $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{50}{x}$ então, x = 100 m

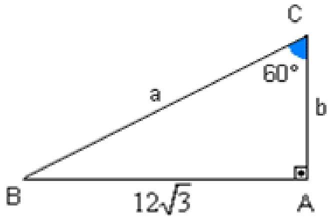
A medida de um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta é de 100m.

a) No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use: sen 65° = 0,91; cos 65° = 0,42 ; tg 65° = 2,14)



Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

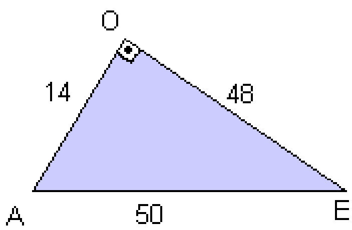
b) Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. (Sen 60° = 0,866)

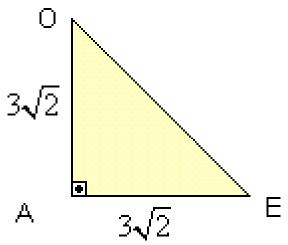


Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

c) Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

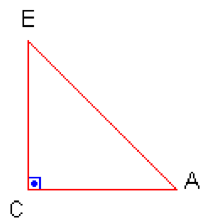
d) Nos triângulos das figuras abaixo, calcule tg Â, tg Ê, tg Ô:





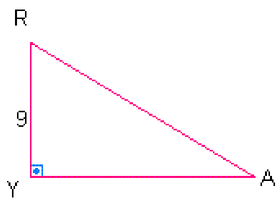
Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

e) Sabendo que o triângulo retângulo da figura abaixo é isósceles, quais são os valores de tg Â e tg Ê?



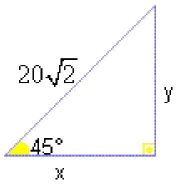
Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

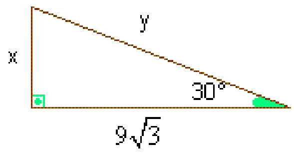
f) Encontre a medida RA sabendo que tg Â = 3



Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

g) Encontre **x** e **y**:





Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

AULA 3: MAPAS CONCEITUAIS intermediários

Plano de aula 3

Após a apresentação do conteúdo de Trigonometria de forma tradicional, solicitamos aos estudantes que elaborassem um novo Mapa Conceitual sobre Trigonometria.

AULA 4: PÊNALTI

Esta foi à primeira aula utilizando a Trigonometria no futebol. O trabalho foi desenvolvido em sala de aula fazendo o estudante pensar em cada movimento utilizado para a realização de uma cobrança de pênalti. Para isso utilizamos as dimensões do gol, distância da marca do pênalti até o gol, diâmetro da bola de futebol, ângulos formados pelas trajetórias das bolas e o solo, em uma cobrança, dentre outros.

Com o intuito de aumentarmos a participação e o interesse dos estudantes nas atividades, fizemos uso de uma linguagem informal e lúdica, e lançamos diversas perguntas, que submeteram os estudantes a estudar cada informação para que conseguissem desenvolver as questões.

Plano de Aula 4

Na nossa primeira aula utilizando a Trigonometria no futebol, trabalharemos em sala de aula fazendo o estudante pensar em cada movimento utilizado para a realização de uma cobrança de pênalti, faremos uso das dimensões do gol, distância da marca do pênalti ate o gol, diâmetro da bola de futebol, ângulos formados pelas trajetórias das bolas e o solo em uma cobrança, dentre outros.

Com o intuito de aumentarmos a participação e o interesse dos estudantes pelas atividades, faremos uso de uma linguagem informal e lúdica.

Desenvolvimento

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

Pré requisitos

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos)

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

Raio e diâmetro

Objetivos

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

Avaliação

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

1º aula

Duração: 55 minutos.

Tema: Trigonometria no futebol

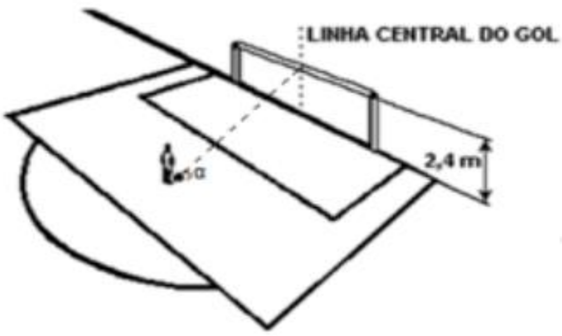
Procedimento: Iniciaremos a aula com a "Questão 1" onde será lançada a pergunta principal, e posteriormente iremos fazendo outros questionamentos para inserir o estudante, gradativamente, na questão.

1.1 Introdução

No campo de futebol, dentro da grande área, há uma marca a 11 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança de uma falta chamada "pênalti". O goleiro fica sobre essa linha, entre duas traves que são paralelas, com uma distância entre elas de 7,3 metros, e com altura de 2,4 metros do solo. Sabemos ainda, que o diâmetro da bola de futebol é de 22 centímetros. Com base nas informações acima responda:

<u>QUESTÃO 1</u>

Olá Galera! Vou apresentar para vocês o nosso amigo Théo. Théo é ótimo em futebol, mas não tão bom em Matemática, por isso precisa de nossa ajuda. Ele quer fazer uma cobrança de pênalti sem a presença do goleiro, e decidiu chutar a bola na direção central do gol. Qual deve ser o ângulo máximo de elevação da bola, para que o Théo consiga fazer o gol?



Fonte: http://professor.bio.br/matematica/comentarios.asp?q=6445&t=Trigonometria

Bom, para que possamos ajudar o Théo, precisamos de alguns dados, que serão coletados a partir de algumas respostas.

Vamos pensar juntos!

a) Se Théo chutar a bola a uma altura de 2,4 metros, conseguirá fazer o gol? Justifique.
b) Qual o raio da bola?
c) Qual a altura máxima que o centro da bola pode atingir para que Théo consiga fazer o gol?
d) Agora desenhe um triângulo representando a situação descrita acima com os valores que você descobriu.
e) Vamos chamar de **α** esse ângulo de elevação, ou seja, o ângulo que a trajetória da bola faz com o solo. Qual é a relação trigonométrica que você usaria para determinar esse ângulo?
f) Utilizando a tabela trigonométrica fornecida na aula anterior, encontre a melhor aproximação inteira para o ângulo **α.**
g) Agora que você já descobriu o valor aproximado do ângulo, encontre a distância que a bola percorreu até atingir o plano que contém as traves do gol.
h) Theo, ao cobrar um novo pênalti, chuta a bola na linha central do gol com uma inclinação de 10º. Com que altura a bola atingirá a linha central do gol? Qual a relação trigonométrica você utilizará para resolver essa questão?

AULA 5: ESCANTEIO

Nesta etapa o nosso trabalho teve inicio na sala de aula, onde trouxemos um jogador fictício (personagem Théo) que executava diversas cobranças de escanteio. Mostramos aos estudantes que para calcular a distância percorrida pela bola, ao ser chutada pelo nosso jogador, seria necessário conhecer as medidas do campo onde as cobranças seriam feitas. E que as cobranças somente poderiam ser feitas com chutes rasteiros.

Mostramos aos estudantes também que após descobrirmos a distância percorrida pela bola, através da razão trigonométrica Tangente, também era possível descobrirmos o ângulo formado pela bola com as linhas que demarcam o campo de futebol.

Após calcularem diversos exemplos de cobranças de escanteios feitos pelo nosso jogador fictício, convidamos os estudantes para que fossemos até a quadra de futebol da escola e medíssemos suas distâncias. Depois, os estudantes formaram duplas, para que pudessem cobrar os escanteios e medir a distância percorrida pela bola. Enquanto um se colocava na posição do escanteio para fazer a cobrança, o outro estudante posicionava-se do outro lado do campo, para fazer a marcação do ponto, no qual a bola cruzou a linha lateral, saindo do campo.

Desta forma, cada Estudante chutou 5 cobranças de escanteio, e calculou a distância que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fez com a linha de escanteio.

Plano de Aula 5

Nosso trabalho se iniciará em sala de aula, para que o estudante entenda o exercício proposto, logo após o estudante fará a medida completa da quadra de futebol da sua escola, conforme exemplo. Com o intuito de facilitar as medidas das bolas chutadas em escanteio, a atividade será feita em duplas, o que acreditamos aumentar participação e o interesse dos estudantes.

Desenvolvimento

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

Pré requisitos

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos)

Teorema de Pitágoras

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

Noções de medidas

Objetivos

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

Avaliação

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

1º aula

Duração: 55 minutos.

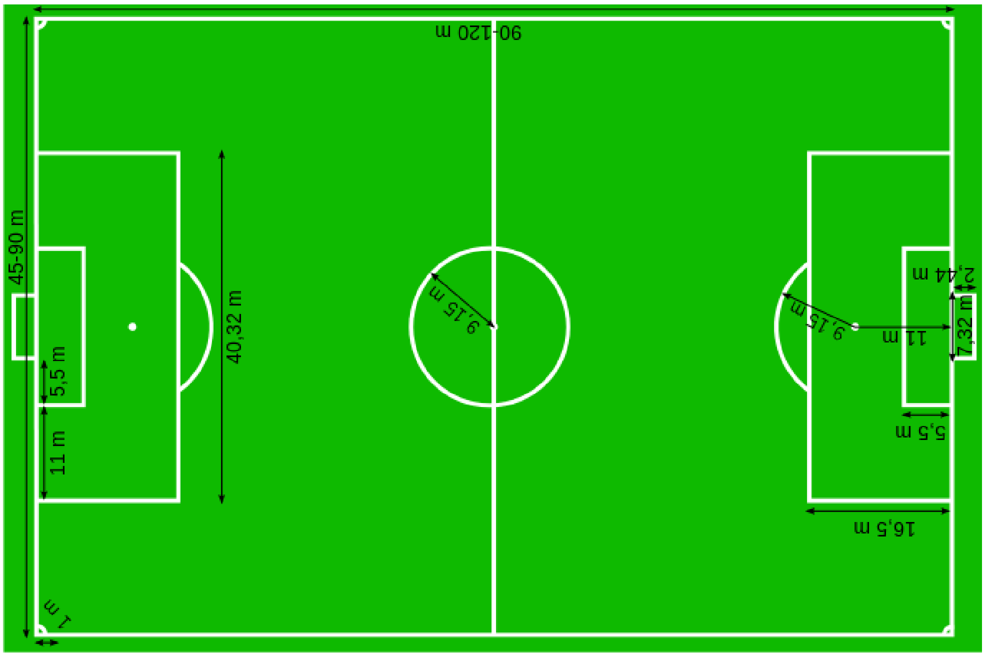
Tema: Trigonometria no futebol

1.1 Introdução

O campo de futebol é feito com medidas exatas, podendo variar de campo para campo. Tomaremos como base para os exercícios em questão o campo com as medidas fornecido. O escanteio é a cobrança de uma falta, devendo o jogador posicionar-se junto à bandeira em um dos quatro cantos do campo, para retornar a bola ao jogo.

QUESTÃO 2

Beleza turma?! Agora nosso amigo Théo decidiu verificar suas habilidades no chute de escanteio. Fez diversas cobranças, o que é demonstrado com uma linha vermelha nas figuras abaixo. Mas primeiro ele teve o trabalho de medir todo o campo para facilitar o nosso trabalho, deixando tudo prontinho. Agora é sua vez, Calcule, em cada caso, qual a distância que a bola percorreu em cada chupe de escanteio, e logo após determine o ângulo formado.

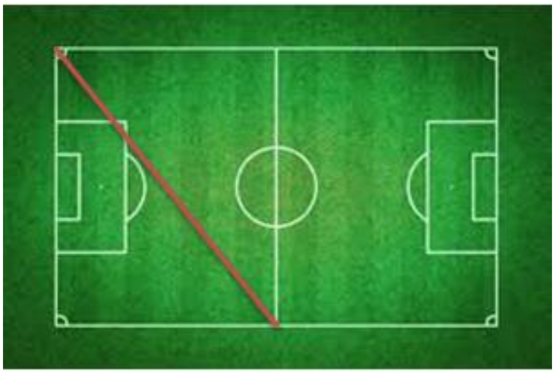


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Campo_de_futebol_medidas.jpg

Imagem ilustrativa com as medidas do campo onde Théo fez as cobranças de escanteio. Utilize as medidas de 120 metros de comprimento e de 90 metros de largura,

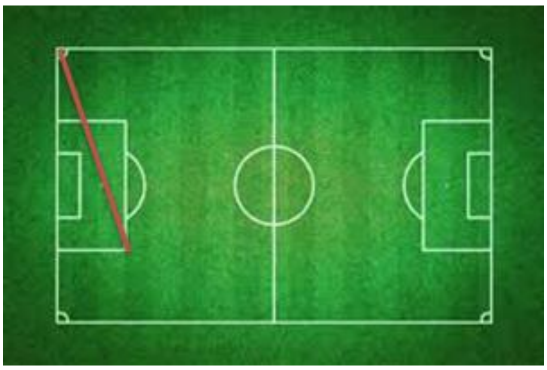
Em cada uma das situações abaixo calcule a distância que a bola percorreu, logo após calcule o ângulo.

a)



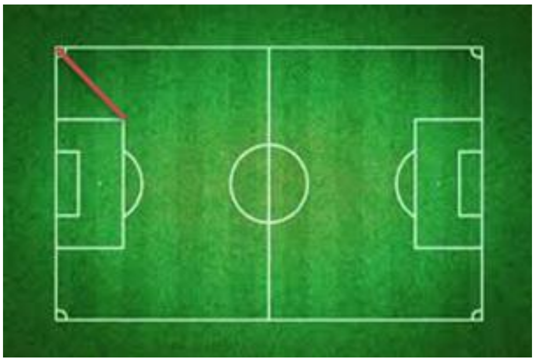
Fonte: autora

b)



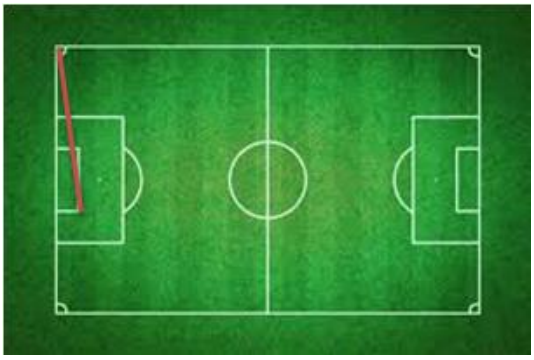
Fonte: autora

c)



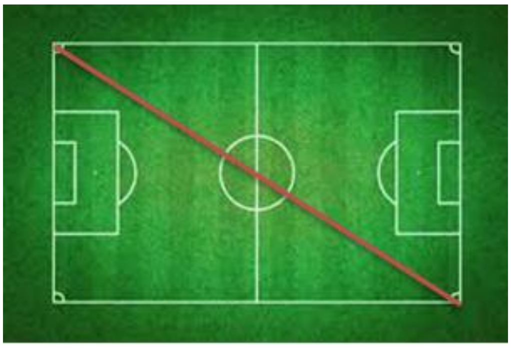
Fonte: autora

d)



Fonte: autora

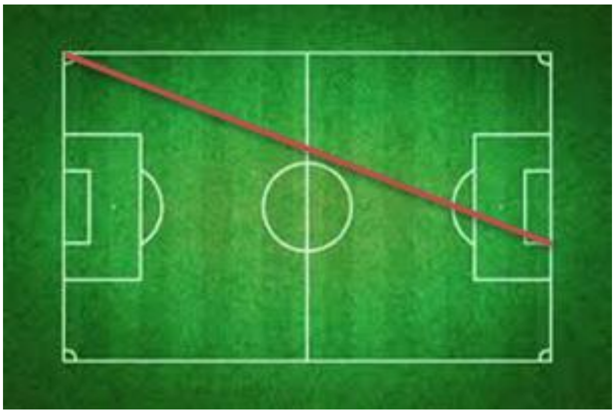
e)



Fonte: autora

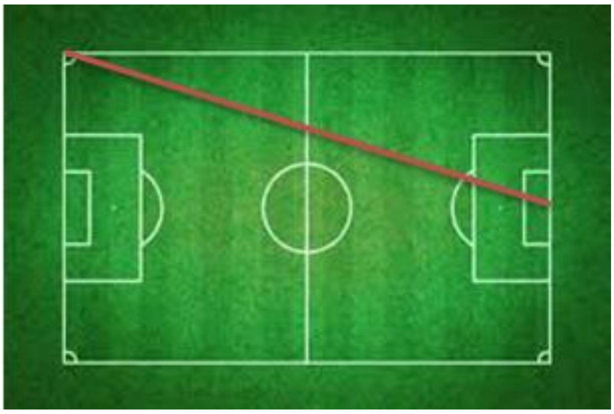
Não satisfeito com todas as cobranças feias, Théo resolveu tentar o gol na goleira oposta à cobrança do escanteio, e ele conseguiu fazer o gol na outra goleira de duas maneiras, como mostra nas figuras a seguir. Calcule a distância que a bola percorreu e o ângulo formado pela mesma com o campo.

a)



Fonte: autora

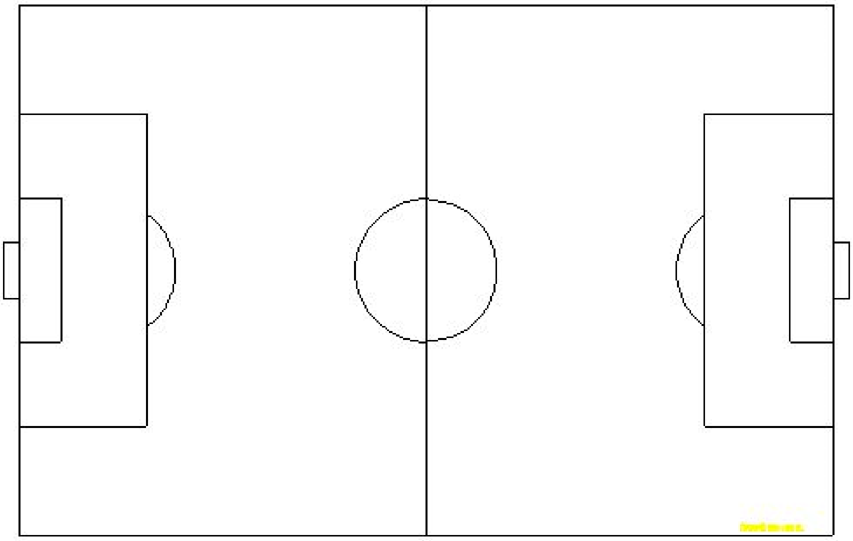
b)



Fonte: autora

Agora chegou a sua vez! Forme dupla com outro colega e vamos a quadra da escola!

Para que possamos faz as cobranças de escanteio, calcular a distância e o ângulo primeiramente precisamos das medidas da quadra, utilize o modelo abaixo e mãos a obra!



Fonte: https://blocoautocad.com/campo-de-futebol-simples/.

Agora que já temos todas as medidas, peça para sua dupla ficar no lado oposto de onde você irá cobrar o escanteio, e a cada chute seu, sua dupla fará a marcação de onde a bola cruzou a linha lateral , saindo do campo.

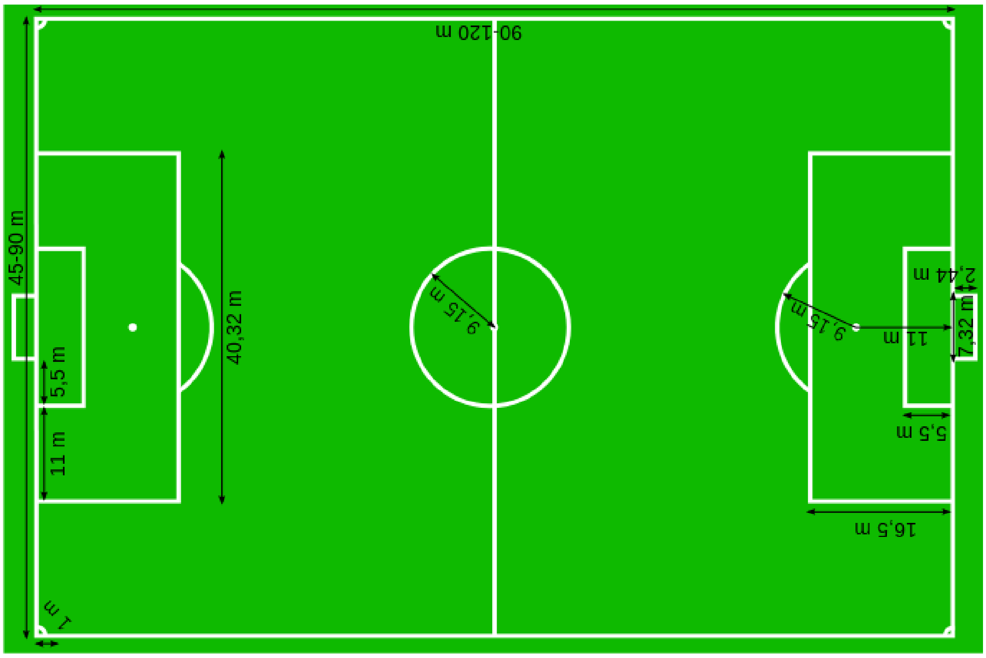
Cada Estudante fará 5 cobranças de escanteio, e calculará a distancia que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fará com a linha de escanteio.

Lembre-se que as cobranças só podem ser rasteira!

MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES – AULA5

QUESTÃO 2

Beleza turma?! Agora nosso amigo Théo decidiu verificar suas habilidades no chute de escanteio. Fez diversas cobranças, o que é demonstrado com uma linha vermelha nas figuras abaixo. Mas primeiro ele teve o trabalho de medir todo o campo para facilitar o nosso trabalho, deixando tudo prontinho. Agora é sua vez, Calcule, em cada caso, qual a distância que a bola percorreu em cada chupe de escanteio, e logo após determine o ângulo formado.

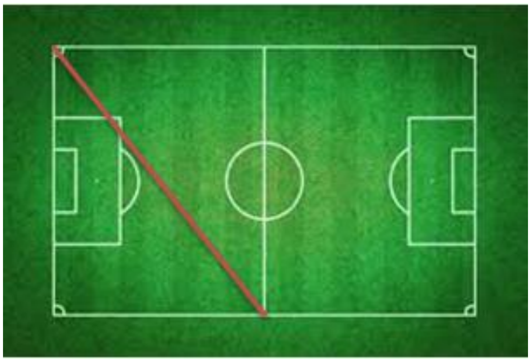


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Campo_de_futebol_medidas.jpg

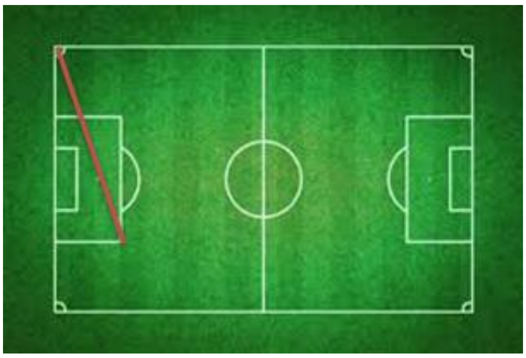
Imagem ilustrativa com as medidas do campo onde Théo fez as cobranças de escanteio. Utilize as medidas de 120 metros de comprimento e de 90 metros de largura,

Em cada uma das situações abaixo calcule a distância que a bola percorreu, logo após calcule o ângulo.

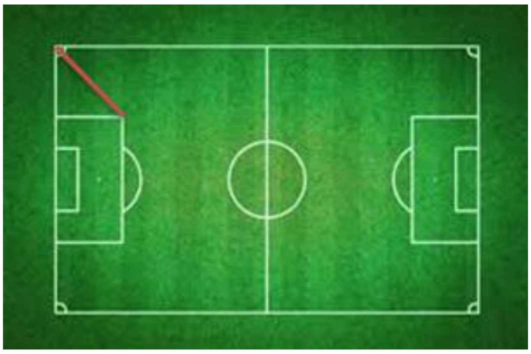
a)



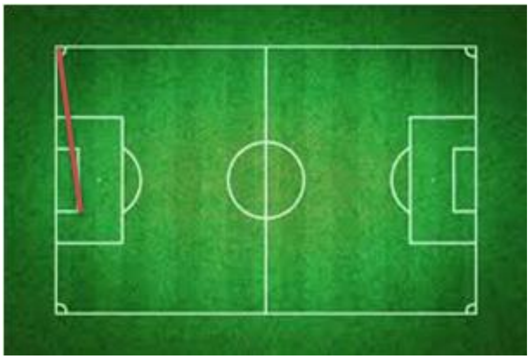
b)



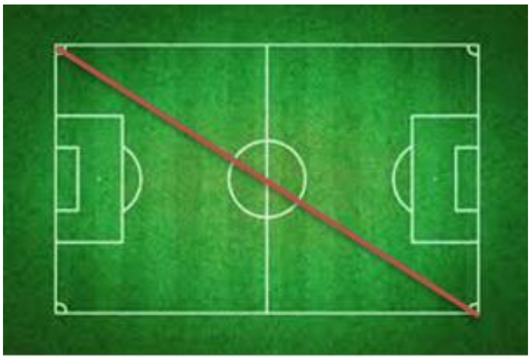
c)



d)

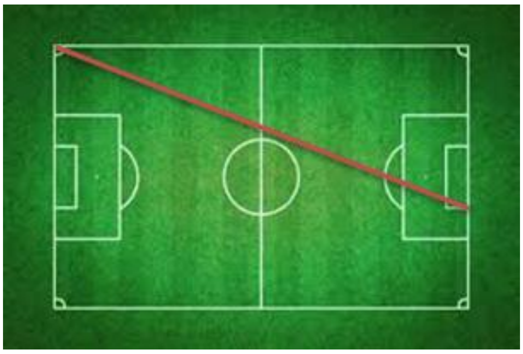


e)

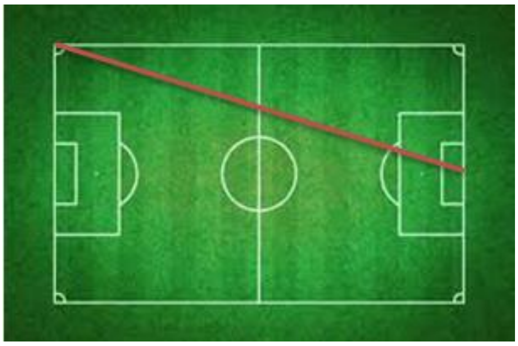


Não satisfeito com todas as cobranças feias, agora Théo resolveu tentar o gol na goleira oposta à cobrança do escanteio, e ele conseguiu fazer o gol na outra goleira de duas maneiras, como mostra nas figuras abaixo. Calcule a distância que a bola percorreu e o ângulo formado pela mesma com o campo.

a)

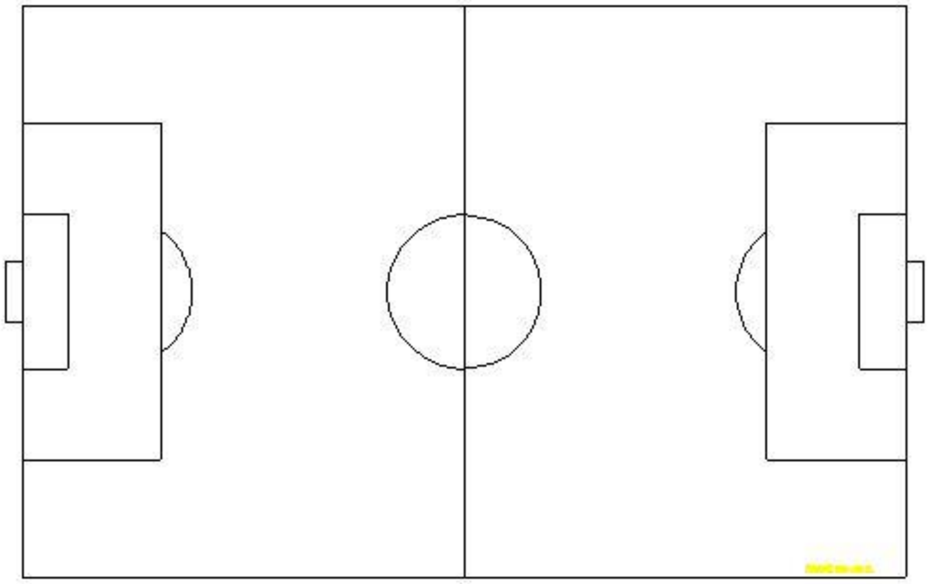


b)



Agora chegou a sua vez! Forme dupla com outro colega e vamos à quadra da escola!

Para que possamos faz as cobranças de escanteio, calcular a distância e o ângulo primeiramente precisamos das medidas da quadra, utilize o modelo abaixo e mãos a obra!



Fonte: https://blocoautocad.com/campo-de-futebol-simples/.

Agora que já temos todas as medidas, peça para sua dupla ficar no lado oposto de onde você irá cobrar o escanteio, e a cada chute seu, sua dupla fará a marcação de onde a bola cruzou a linha lateral, saindo do campo.

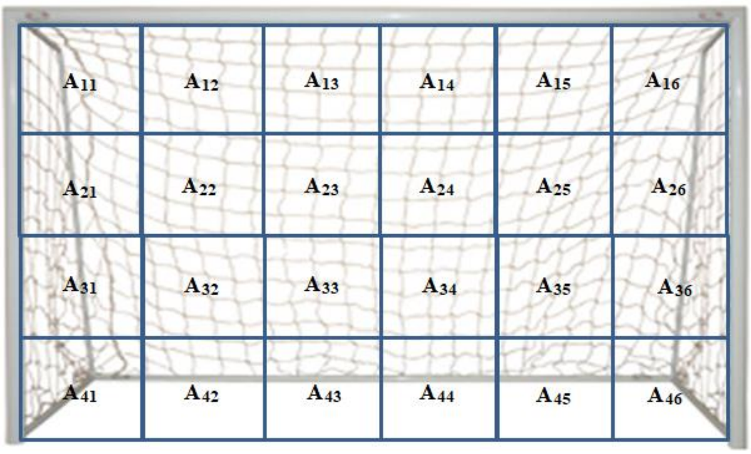
Cada Estudante fará 5 cobranças de escanteio, e calculará a distancia que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fará com a linha de escanteio.

Lembre-se que as cobranças só podem ser rasteira!

AULA 6: PÊNALTI E QUADRANTES

Nesta aula trouxemos a seguinte questão para nossos estudantes: “Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão. Neste caso, a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora Théo irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.”
A Figura 1 representa um modelo de goleira dividida em 24 quadrantes e cada quadrante é um quadrado de lado medindo 50 cm.

Figura 1 – Goleira dividida em quadrantes



Fonte: a autora

Para que a atividade desenvolvida ficasse mais próximo possível da realidade projetada, determinamos que a bola sempre entraria no centro de cada quadrante. Assim, a primeira atividade foi solicitar que os estudantes determinassem o centro de cada quadrante, dando como exemplo que o ponto central do quadrante $\mathbf{A_{41}}$, que encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm. Baseado neste exemplo poderiam calcular os demais.

Logo após calcularem os pontos centrais dos quadrantes, perguntamos para os estudantes se foi necessário calcular cada individualmente como feito no exemplo do quadrante **A_{41}** ou se descobriram alguma outra maneira de achar o ponto central de cada quadrante.

Depois de calcularem os pontos centrais, solicitamos que calculassem os ângulos que a bola chutada por Théo fez, imaginando que a bola possa entrar em qualquer um dos quadrantes, foi necessário calcular o ângulo de todos os quadrantes, sendo que para cada quadrante 2 ângulos foram calculados, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral da mesma.

Na Figura 2, temos o exemplo da marca do pênalti localizada a 6 metros da linha do gol, e de um ângulo formado por uma possível cobrança de pênalti de forma rasteira.

Figura 2 – Exemplo de distância e ângulo lateral

Fonte: a autora

Depois de todo esse trabalho desenvolvido em sala de aula, mais uma vez nos deslocamos até a quadra da escola para, primeiramente, verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira.

Com a goleira já devidamente dividida em quadrantes, selecionamos um estudante para ser o “Juiz” e informar em qual quadrante cada estudante acertou o gol. Cada estudante teve direito a chutar a falta 5 vezes. Cada um, com suas próprias medidas, pode fazer novamente os cálculos de distância e ângulo, dos seus chutes a gol, e o mesmo fez, e com as medidas da quadra de sua escola.

Plano de Aula 6

O futebol é o esporte mais popular do mundo. Ele é jogado em todos os países nos mais diferentes níveis. As Regras dos Jogos são as mesmas praticadas pelo mundo afora, desde a final da Copa do Mundo FIFA até uma partida entre crianças em um pequeno vilarejo (CBF, 2017).

Um tiro penal (pênalti) será marcado se um jogador cometer uma infração punível com tiro livre direto dentro de sua própria área penal (CBF, 2017).

Neste trabalho será cobrado o tiro penal sem a presença do goleiro, com o intuito de analisar em qual parte da goleira a bola chutada entrou.

Nosso trabalho iniciará em sala de aula para que possamos explicar para o estudante como será calculado a distância e o ângulo tanto na altura como na lateral, da bola chutada na cobrança de falta denominada Pênalti.

Desenvolvimento

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

Pré requisitos

Triângulo retângulo (hitpotenusa e acatetos)

Teorema de Pitágoras

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

Objetivos

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

Avaliação

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

1º aula

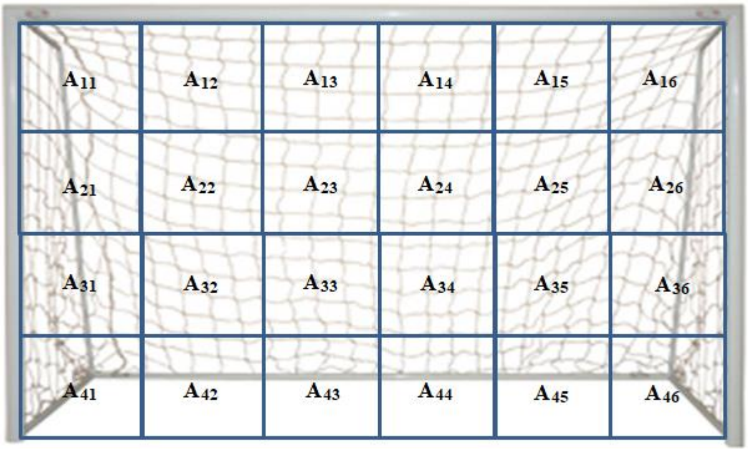
Duração: 55 minutos.

Tema: Trigonometria no futebol

Procedimento: Nesta aula resolveremos a “Questão 3” onde será inicialmente explicado para o estudante como iremos calcular a distância e o ângulo tanto na altura como na lateral, da bola chutada na cobrança de falta denominada Pênalti. Daremos sequencia a aula com diversos questionamentos para o aprendizado do estudante, e posteriormente faremos o exercício em questão na prática.

QUESTÃO 3

Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão, sendo que a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante, como mostra na figura abaixo. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.



Fonte: autora

Importante: Será definido como certo, que a bola sempre entrará no centro de cada quadrante.

Vamos trabalhar?!

Primeiramente precisamos descobrir qual o ponto central de cada um dos quadrantes, como você fará isso?

Ex: Se cada quadrante é um quadrado de 50 X 50 cm então:

O ponto central do quadrante $\mathbf{A_{41}}$ encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm.

Baseando-se no exemplo calcule o ponto central de todos os outros quadrantes.

- Foi necessário calcular o ponto central de todos os 24 quadrantes? Justifique.

- Agora que você já sabe todos os pontos centrais, calcule quais serão os ângulos que fará a bola chutada por Théo, imaginando que ele chute em todos os quadrantes. (para cada quadrante 2 ângulos, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral)
- Temos 24 quadrantes, teremos 24 ângulos? Justifique.

Exemplo de distância e ângulo lateral

Fonte: a autora

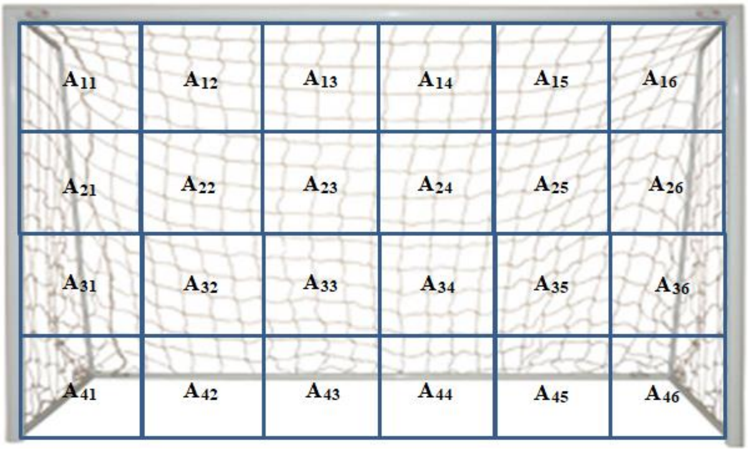
Agora que você já calculou os chutes do Théo, que tal irmos para a quadra da escola e chutarmos nossas próprias faltas?

- Primeiramente será necessário verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira, da quadra da escola.
- Com a goleira da quadra devidamente dividida já, cada Estudante chutará 5 vezes ao gol, da marca de cobrança do pênalti, o “juiz” irá informar qual quadrante o Estudante acertou, e o mesmo fará novamente os cálculos de distância e ângulo agora dos seus chutes a gol, e com as medidas da quadra de sua escola.

MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES

QUESTÃO 3

Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão, sendo que a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante, como mostra na figura abaixo. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.



Fonte: a autora

IMPORTANTE: Será definido como certo, que a bola sempre entrará no centro de cada quadrante.

Vamos trabalhar?!

Primeiramente precisamos descobrir qual o ponto central de cada um dos quadrantes, como você fará isso?

Ex:

Se cada quadrante é um quadrado de 50 X 50 cm então:

O ponto central do quadrante $\mathbf{A_{41}}$ encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm.

Baseando-se no exemplo calcule o ponto central de todos os outros quadrantes.

- Foi necessário calcular o ponto central de todos os 24 quadrantes? Justifique.
- Agora que você já sabe todos os pontos centrais, calcule quais serão os ângulos que fará a bola chutada por Théo, imaginando que ele chute em todos os quadrantes. (para cada quadrante 2 ângulos, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral)
- Temos 24 quadrantes, teremos 24 ângulos? Justifique.

Exemplo de distância e ângulo lateral

Fonte: a autora

Agora que você já calculou os chutes do Théo, que tal irmos para a quadra da escola e chutarmos nossas próprias faltas?

- Primeiramente será necessário verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira, da quadra da escola.
- Com a goleira da quadra devidamente dividida já, cada Estudante chutará 5 vezes ao gol, da marca de cobrança do pênalti, o "juiz" irá informar qual quadrante o Estudante acertou, e o mesmo fará novamente os cálculos de distância e ângulo agora dos seus chutes a gol, e com as medidas da quadra de sua escola.

AULA 7: ESQUEMA TÁTICO

No futebol, os esquemas táticos são os meios de um treinador escalar sua equipe dentre de campo. Para Melo (2001) “tática é a arte de combinar a técnica individual de cada jogador, em suas diferentes linhas e posições, de modo a obter o máximo de rendimento do conjunto, em um determinado jogo.”

Segundo Drubscky (2003), é tática no futebol tudo aquilo que é realizado com o intuito de alcançar a vitória em uma partida.

Por isso, os treinadores quando chegam a uma determinada equipe, planejam através de seus conhecimentos, adotar esquemas táticos que auxiliem essa equipe a alcançar a vitória.

Desta forma, pretendemos mostrar aos estudantes que os esquemas táticos do futebol também utilizam a Trigonometria para se beneficiar.

No esquema tático, demonstrado para os estudantes, utilizado no futebol de campo conhecido como 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) podemos observar várias figuras geométricas, assim como diversos ângulos. Utilizamos essas figuras geométricas e ângulos para demonstrarmos a Trigonometria nesse esquema.

Plano de Aula 7

Desenvolvimento

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

Pré-requisitos

Pontos e Retas

Ponto médio

Circunferência

Vértice

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos)

Teorema de Pitágoras

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

Objetivos

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

Avaliação

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

1º aula

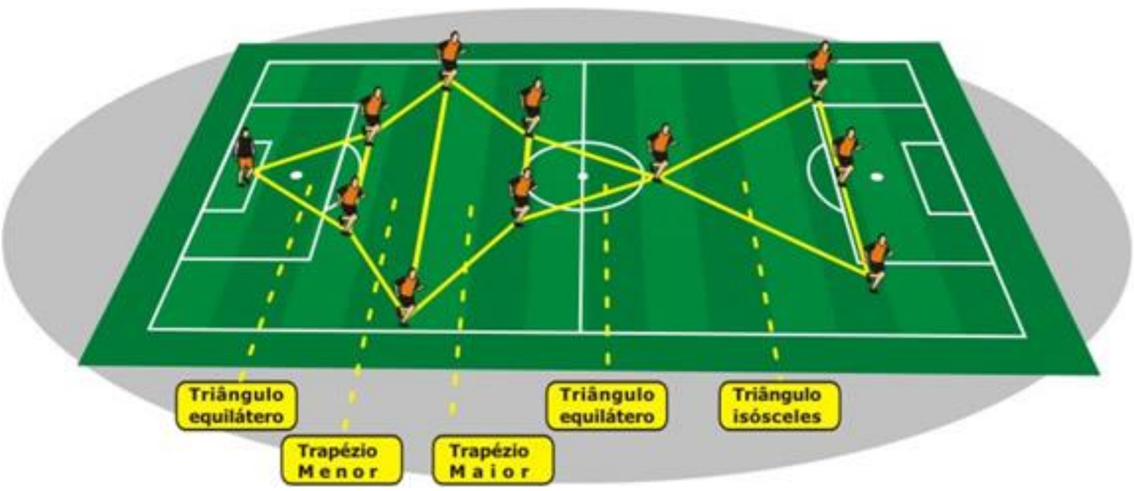
Duração: 55 minutos.

Tema: Trigonometria no esquema tático do futebol

Procedimento: A "Questão 4" será referente ao esquema tático utilizado no futebol de campo conhecido como 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes). Este esquema foi muito utilizado no passado, quando a prioridade era o ataque, o futebol bonito, chamado futebol arte. Com este esquema podemos observar várias figuras geométricas assim como diversos ângulos. Utilizaremos essas figuras geométricas e ângulos para demonstrarmos a Trigonometria nos esquemas táticos.

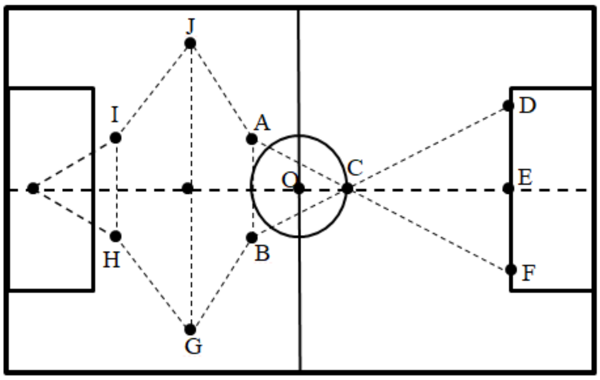
QUESTÃO 4

Pessoal, desta vez nosso amigo Théo resolveu convocar todo time pra jogar, e claro ficou com diversas dúvidas Matemáticas que teremos que ajudá-lo a resolver. O treinador do time resolveu adotar o esquema tático 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) por ser um esquema muito ofensivo, já que o time precisava reverter algum resultado desfavoráveis. Para explicar melhor o esquema para o time usou a figura abaixo.



Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Mostrando esse esquema tático Pedro, o treinador, informou que seria possível observar diversas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos, porém isso não ficou muito claro para alguns jogadores, então Pedro fez um novo desenho do campo.

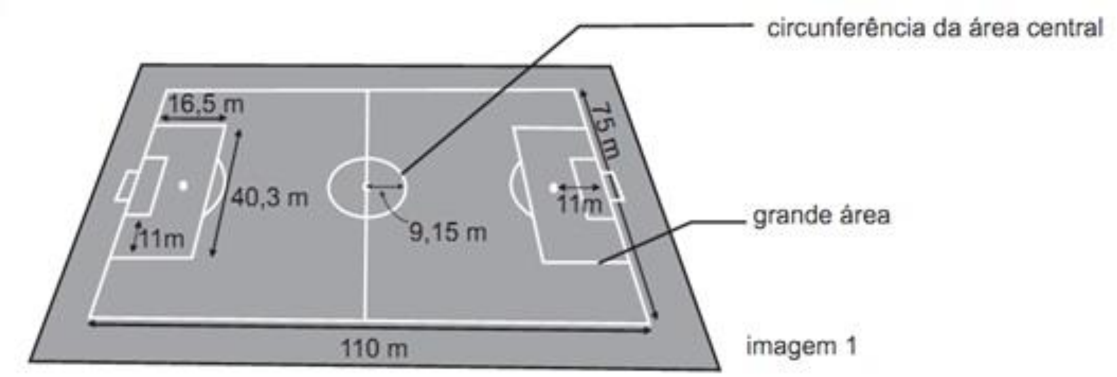


Fonte: autora

E explicou para o time:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.
- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.
- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a reta $\overline{CE}$.

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos as medidas do campo conforme figura abaixo.



Fonte: http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/

Porém alguns lances que aconteceram durante o jogo deixaram Théo com duvidas, vamos ajudá-lo?

1) O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distancia que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?

- Algumas perguntas serão feitas ao Estudante para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:

- Você consegue visualizar algum triangulo retângulo?
- Como você conseguirá algumas medidas?
- Você possui medidas do campo?
- Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente, isso pode lhe ajudar?
- Você pode utilizar semelhança de triângulos?
- Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?

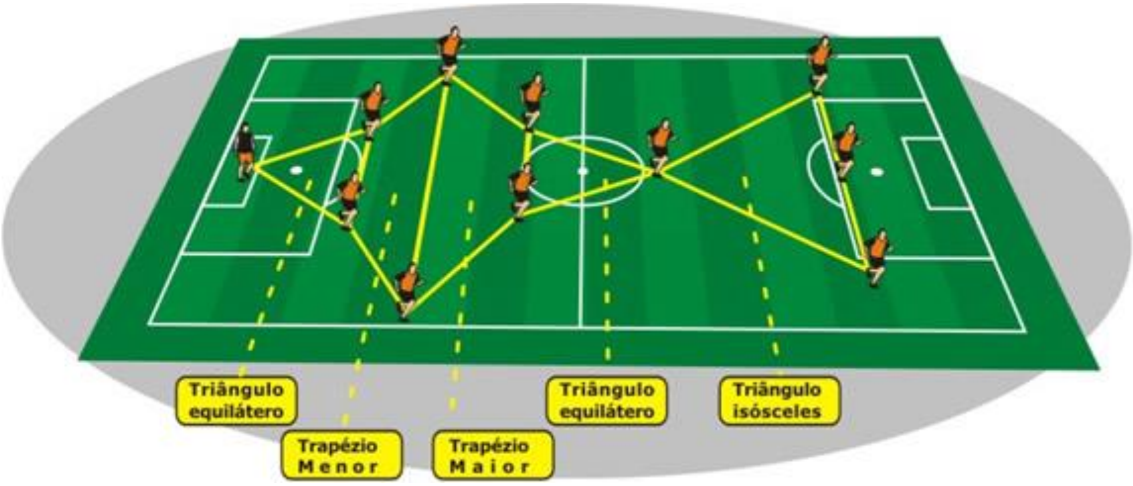
2) Sabendo que os trapézios GHIJ e ABGJ são iguais ajude a descobrir qual a distância que a bola percorreu saído do jogador H até o Jogar B sendo que a distância de G e H é 20 metros e o ângulo HGJ é de 40º.

3) Qual a distância percorrida pela bola saindo do jogador E e chegando até o jogador B?

MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES - AULA 7

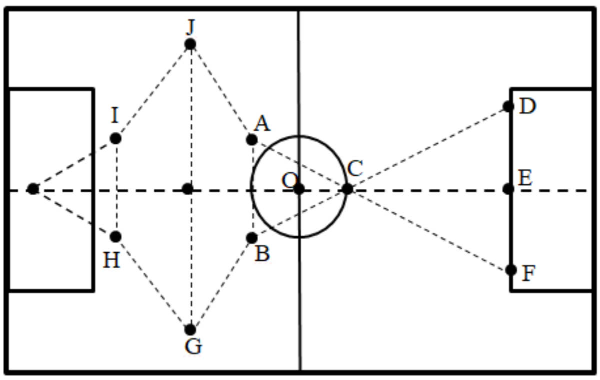
QUESTÃO 4

Pessoal, desta vez nosso amigo Théo resolveu convocar todo time pra jogar, e claro ficou com diversas dúvidas Matemáticas que teremos que ajudá-lo a resolver. O treinador do time resolveu adotar o esquema tático 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) por ser um esquema muito ofensivo, já que o time precisava reverter algum resultado desfavoráveis. Para explicar melhor o esquema para o time usou a figura abaixo.



Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Mostrando esse esquema tático Pedro, o treinador, informou que seria possível observar diversas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos, porém isso não ficou muito claro para alguns jogadores, então Pedro fez um novo desenho do campo.



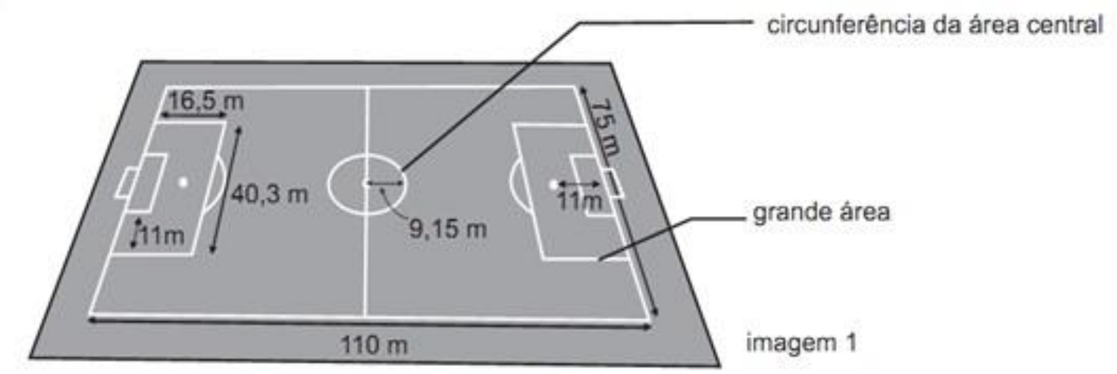
Fonte: autora

E explicou para o time:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.
- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.

- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a reta $\overline{CE}$.

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos as medidas do campo conforme figura abaixo.



Fonte: http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/

Porém alguns lances que aconteceram durante o jogo deixaram Théo com duvidas, vamos ajudá-lo?

1) O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distancia que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?
   - Algumas perguntas serão feitas ao Estudante para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:
     - Você consegue visualizar algum triangulo retângulo?
     - Como você conseguirá algumas medidas?
     - Você possui medidas do campo?
     - Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente, isso pode lhe ajudar?
     - Você pode utilizar semelhança de triângulos?
     - Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?
2) Sabendo que os trapézios GHIJ e ABGJ são iguais ajude a descobrir qual a distância que a bola percorreu saído do jogador H até o Jogar B sendo que a distância de G e H é 20 metros e o ângulo HGJ é de 40º.
3) Qual a distância percorrida pela bola saindo do jogador E e chegando até o jogador B?

AULA 8: MAPA CONCEITUAL FINAL

Após finalizar a aplicação da UEPS, ensinando a Trigonometria de forma diferenciada aos estudantes, com a prática no futebol, solicitamos aos mesmos que elaborassem o último Mapa Conceitual sobre Trigonometria, e entregassem esse desenvolvimento para mais uma vez pudéssemos avaliar a aprendizagem dos estudantes.